APLICACIÓ DE LA REPRESENTACIÓ CONFORME AL PROBLEMA DE DIRICHLET

1. Funcions harmòniques

Del teorema II (Conf. 1.ª § 5) resulta que si

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

és analítica, admeten derivades parcials successives les funcions reals u i v. Derivant les equacions de Cauchy-Riemann i sumant, resulta:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \,.$$

Es a dir:

I. *La part real* $\Re f(z)$ *i la part imaginaria* $\Im f(z)$ *d'una funció analítica* $f(z)$ *són funcions harmòniques, és a dir, satisfan l'equació de Laplace.*

Donada una funció harmònica qualsevol u en un recinte simplement conex S, si es troba la funció

$$v = \int_{ab}^{xy} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + C$$

qualsevol que sigui el camí d'integració entre el punt fixe (ab) i el punt variable (xy) del recinte, és $u + iv$ una funció analítica de z en el recinte S.

En efecte: cal observar només que aquesta funció v junt amb la u satisfà les equacions de Cauchy-Riemann. Per tant:

II. *Tota funció harmònica u en un recinte simplement conex* S *determina unívocament* (fòra d'una constant additiva) *una altra funció harmònica v anomenada* CONJUGADA *de la u, que amb ella compòn la funció analítica* $u+iv$.

Si apliquem el teorema de Cauchy (Conf. 1.ª § 4) a la funció analítica

$$f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

en el cercle de centre O i radi r, posant $t=re^{\varphi i}$, obtenim com a valor en l'origen:

$$u(o, o)+iv(o, o)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)\,dt}{t}=\frac{1}{2\pi}\int_c f(t)\,dt$$

i igualant les parts reals,

$$u(o, o)=\frac{1}{2\pi}\int_c \mathrm{M}\,d\varphi$$

anomenant M els valors de u en el contorn. Per consegüent

III. *Coneguts els valors d'una funció harmònica en els punts d'una circumferencia, el seu valor en el centre és la llur mitjana aritmètica.* (Teorema de Gauss.)

D'aquí resulta, igual que per a les funcions analítiques:

IV. *Si una funció harmònica en un recinte no és constant, assoleix son valor màxim i mínim solament en punts del contorn.*

2. El problema de Dirichlet

El teorema III planteja aquest problema capital: poden donar-se *arbitrariament* (sense altre condició que la continuitat) els valors d'una funció harmònica en el contorn d'un recinte? En cas afirmatiu, quantes funcions harmòniques existeixen que prenguin en el contorn els valors prefixats? (*)

Que la solució, si existeix, és única, resulta del teorema IV, puix si hi hagués dues funcions harmòniques u_1, u_2 amb els mateixos valors en el contorn, la funció harmònica $u_1 - u_2$ sería nul·la en aquest contorn; i essent zero el seu màxim i el seu mínim, fóra $u_1 - u_2 \equiv 0$ en tot el recinte, o sigui $u_1 \equiv u_2$. Cal, doncs, només trobar una funció $u(x,y)$ que prengui en el contorn els valors prefixats i satisfaci l'equació de Laplace $\Delta u(x,y) = 0$. Aquesta serà la solució del problema.

Aquesta qüestió d'existencia cal només demostrar-la per al cercle, puix qualsevol altre recinte simplement conex pot representar-se conformement damunt d'ell, en virtut del teorema de Riemann, i l'equació $\Delta u = 0$ és invariant respecte de les representacions conformes, com anem a demostrar.

Sigui R un recinte en el pla xy i R$'$ el seu transformat conforme en el pla ξ, η per una certa funció $\zeta = f(z)$. Si $u\ (x, y)$ és una funció harmònica en el recinte R, i traslladem els valors del pla xy al $\xi\eta$, de manera que assignem el mateix valor als punts corresponents, és u funció de ξ, η. Demostrem que si en el recinte R és u harmònica, també ho és en el R$'$. En efecte:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

i recordant que per ésser R$'$ transformat conforme de R, és

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

(*) La qüestió és encara més interessant per ésser la contesta negativa per a les funcions analítiques, malgrat de l'analogía que presenta amb aquestes.

resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2\right]$$

i com aquest últim factor és distint de zero per ésser $f'(z) \neq 0$, resulten equivalents les dues condicions

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

3. Resolució del problema de Dirichlet per al cercle

El teorema del valor mitjà de Gauss ens dóna directament el valor de la funció buscada en el centre del cercle. Per a trobar el valor de la funció en altre punt

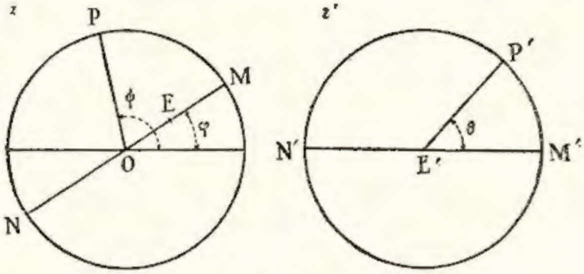

Fig. 24

procedirem a una transformació conforme del cercle donat en altre del qual el punt donat sigui el nou centre. Cal sols després traslladar la funció obtinguda per l'aplicació directa del teorema de la mitjana al nou cercle. En aquesta idea de Bôcher apoyem la següent demostració original, que sols exigeix recursos molt elementals. Sigui E el punt de coordenades polars r i φ (fig. 24). El cercle transformat tindrà per centre E' transformat de E. Sigui N'M' la recta que correspòn al diàmetre NM que passa per E, la qual serà el nou eix de quantitats reals. Un punt qualsevol P del contorn tindrà per transformat per exemple P′. Anomenant θ l'angle P′E′M′ es tindrà

$$U_{E'} = \frac{1}{2\pi}\int U_{P'} d\theta.$$

En aquesta fórmula la majúscula U indica valor de contorn.

La funció linial que transforma $C_{z'}$ en C_z, transforma E′P′ en una circumferencia que passa pel punt E, per son

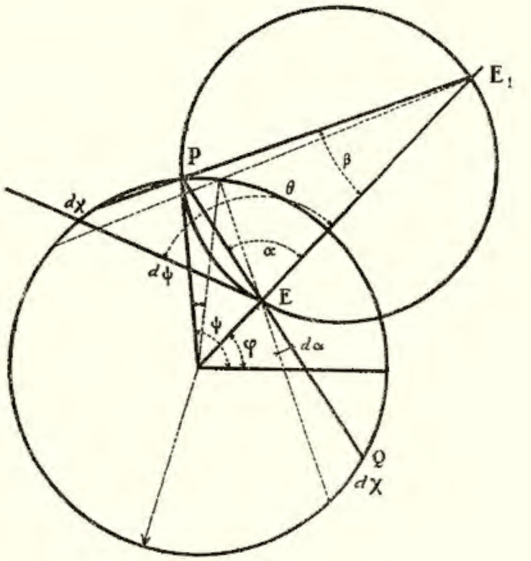

Fig. 25

conjugat E_1 respecte de C_z i per P (fig. 25). Amb les notacions de aquesta figura i recordant que la transformació conforme no altera els angles, es té

$$\alpha + \beta = \theta$$

$$d\alpha = \frac{d\chi + d\psi}{2}, \qquad d\beta = \frac{d\chi - d\psi}{2}.$$

Per tant

$$d\theta = d\chi$$

I per consegüent, si existeix la funció buscada, aquesta és necessariament:

$$u_E = \frac{1}{2\pi}\int U_P d\chi \qquad \text{(Schwarz)}$$

estesa la integral al cercle donat.

Si en lloc de $d\chi$ introduim $d\psi$, que és l'element natural d'arc en el cercle donat, la fórmula anterior, que, segons veurem, resol el problema, es converteix en la de Poisson.

En efecte, es fàcil veure que si PE$=l$, QE$=l'$,

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \frac{l'}{l} = \frac{ll'}{l^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\psi - \varphi)};$$

per tant, i suposant que sigui R el radi del cercle donat, resulta la fórmula coneguda

$$u_E = \frac{1}{2\pi}\int U_P \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2r\,R\cos(\psi - \varphi)}\, d\psi$$

Ara manca sols demostrar que aquesta solució convé al problema per ésser harmònica i pendre els valors prefixats en el contorn. En efecte: la funció es pot considerar com la part real de la funció complexa

$$\frac{p+z}{p-z}$$

en que p representa P i z representa E. Per lo tant, satisfà l'equació de Laplace ja que,

$$\Delta u = \frac{1}{2\pi}\int U\Delta\left[\Re\left(\frac{p+z}{p-z}\right)\right] d\psi = 0.$$

Vejam ara a quins valors tendeix u quan ens atancem a la circumferencia contorn. Suposem que E es troba prop d'ella. Traci's fig. 26 la corda perpendicular al radi vector, la qual divideix la circumferencia en dues regions χ_1 i χ_2.

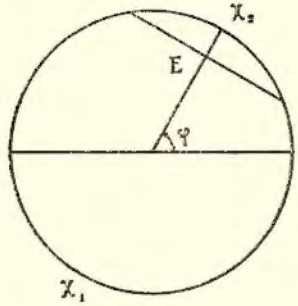

Fig. 26

Aquesta es fa zero en el límit quan E arriba a la circumferencia. La segona abraça aleshores tot el cercle. Es evident que

$$u_E = \frac{1}{2\pi}\int_{\chi_1} U_2 d\chi_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{\chi_2} U_1 d\chi_2$$

essent U_2 i U_1 els valors de U en χ_2 i χ_1 respectivament. Sigui M el màxim de $|U|$. Evidentment:

$$\left|\int_{\chi_2} M_1 d\chi_1\right| \overline{\overline{<}} \int_{\chi_2} M d\chi_2 = M\chi_2$$

que té per límit zero. Queda designant per U_E el valor límit de U_2

$$\lim u_E = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lim\ U_2 d\chi = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} U_E d\chi = U_E.$$

S'ha suposat que la successió de valors en el contorn és continua. Si hi hagués un punt en que no ocorregués, el valor que per a ell dóna la solució anterior, no és únic i depèn de la direcció segons la qual ens atancem al valor en el contorn. No entrarem en detalls respecte d'aquest cas.